Newton-Raphson法と Raphsonの数値例(数値計算基本アルゴリズムとそのソフトウェアの研究)

AUTHOR(S):

五十嵐, 正夫; 室伏, 誠

数理解析研究所講究録
648巻 1988年 128-144

Newton-Raphson法とRaphsonの数値例

日大 農獣医 五十嵐正夫 (Masao Igarashi)
訓大 電子科 室 伏 誠 (Makoto Murofushi)

1．はじめに

代数方程式

(1)　$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + ax + a = 0$

の数値解を初期値 $x=x_0$ を与えて反復式

(2)　$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})/f'(x_{n-1})$

によって求める方法はNewton法あるいはNewton-Raphson法と呼ばれる．著者らが最初に興味を持ったのは(2)の反復解法に2つの呼び名が付いていることであった．(2)はNewtonとRaphsonが独立に発見したのであろうか？　Newtonが発見したのをRaphsonが改良したのであろうか？　あるいはNewtonが発見した方法とRaphsonの発見した方法には差異があるのであろうか？

Newton法とNewton-Raphson法の差異についての具体的な説明は，調べた限りにおいては，以下の３通りであった．

(a)　Newton-Raphsonは英国流に呼ぶとNewton法となる．

(b)　多変数の場合Newton-Raphson法と呼ぶ．

(c)　例えば　$x^2-a=0$　の解を

$$x_n = x_{n-1} - (x^2_{n-1}-a)/2x_{n-1}$$

の方法で計算するときNewton-Raphson法と呼び，それを

$$x_n = (x_{n-1}+a/x_{n-1})/2$$

と変形してから計算するときNewtonと呼ぶ．

ここでは最初にNewtonが提案した代数方程式の反復解法とRaphsonが提案した解法との差異について調べてみる．

代数方程式の反復解法がまだ数字方程式の解法と言われた16世紀や17世紀の時代，代数学の父と言われるVietaやNewtonの親友と言われるRaphsonは代数方程式に関して多くのまとまった数値例を挙げている．両者の解法や数値例には大きな差異があるがそれらに対しての言及はあまりされてないようである．ここでは第2番目としてVietaの解法と彼らの数値例の差異について考察してみる．

Newtonが元来提案した方法は反復を重ねるに従い方程式自体が変化し係数の桁数は一般に増加する．逆に各段階での数値解（元の方程式の数値解に対する補正値と同様なもの）の桁数はそれほど増加しない．他方Raphsonの提案した方法（ほとんど(2)と同じ）においては方程式の係数自体はまったく変化しないが反復の度毎に数値解の桁数は一定の割合で増加する．計算機を利用して浮動小数点演算によって代数方程式の数値解を求める場合係数の精度桁数は重要な役割を演じるた．そこで3番目として，元来Newtonが提案した代数方程式の数値的解法による数値解とRaphsonが提案した数値的解法による数値解の差異を数値計算によって確かめてみる．

以上の３点を考察することにより，数値計算の立場からみたVietaの功績や，ともすればNewtonの陰に隠れあまり知られることのないRaphsonの業績の一端に触れてみたい．

２．原始Newton法

現在Newton法あるいはNewton-Raphson法といわれている解法と区別するためにNewtonが元来提案した方法をここでは以後原始Newton法と呼ぶことにする．先ず有名な代数方程式　$y^3-2y-5=0$ を例に取りそれを説明する．

解法（例えば(1)参照）

$y^3-2y-5=0$		+2.10000000（第２近似値）
		-0.00544853（第２近似値の補正値）
		+2.09455147=y（第３近似値）
$2+p=y$	$+y^3$	$+8+12p+6p^2+p^3$
	$-2y$	$-4-2p$
	-5	-5
	(Summa)	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0.1+q=p$	$+p^3$	$+0.001+0.03q+.0.3q^2+q^3$
	$+6p^2$	$+0.06+1.2+6.0$
	$10p$	$+1+10$
	-1	-1
	(Summa)	$+0.061+11.23q+6.3q^2+q^3$
$-.0054+r=q$	$+6.3q^2$	$+0.000183708-0.06804+6.3r^2$
	$+11.23q$	$-0.060642+11.23$
	0.061	$+0.061$
	(Summa)	$+0.000541708+11.16196r+6.3r^2$

説明

近似値y=2.0をえたあと次の近似値をy=2+pとして原式に代入して

$p^3+6p^2+10p-1=0$(Summa)

える．この式において高次項，p^3とp^2を無視して$10p-1=0$より$p=0.1$をえる．次に$p=q+0.1$ として　これを$p^3+6p^2+10p-1=0$　に代入して

$q^3+6.3q^2+11.23q+0.061=0$(Summa)

をえる．ここでも高次項を無視して$11.23q+0.061=0$より$q=-0.0054$をえる．次に$q=-0.0054+r$ を $q^3+6q^2+11.23q+0.0061=0$ に代入してrの高次項を無視することにより，$r=-0.00004853$ をえる．その様にして近似値

$y=2.0+.01-0.0054-0.00004853$ をえる．

この例でもわかるように，Newtonは方程式 $f(x)=0$ において 近似値x_0をえたあと

$x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$

によって次の近似値x_1と新しい方程式$f_1(x)=f(x+x_0)=0$をつくる．同様に

$x_{n+1}=x_n-f_n(x_n)/f_n'(x_n)$

より順次近似値x_{n+1}と新しい方程式$f_{n+1}(x)=0$ をえていくわけである．

３．Raphsonの解法

Raphsonはその著作（6）の中で，xを未知数，a,bを与えられた定数とした場合の3次の代数方程式 $x^3=3$ と $ax-x^3=b$ に関する定理または命題と称する反復解法，32個の数値例，反復公式集，単項式の微分公式を与えている．そこでの反復解法は現在Newton-Raphson法と言われる反復解法の原型をなしている．反復公式集は方程式の次数と係数の符号によってそれぞれあたえられている．例えば次のようである．

$x^2+ax=b$ $\quad y=(b-gg-ag)/(2g+a)$ $\quad x=(b+gg)/(2g+a)$

すなわちa,bを定数，xを未知数とし方程式 $x^2+ax=b$ において最初の近似値をgとして補正値yを計算する．次に $x=g+y=(b+gg)/(2g+a)$ によって近似値xをえてそれを次の近似値gとするわけである．$f(x)=x^2+ax-b$ とおき x_0 を出発値とすると現在のNewton-Raphson法

$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)=x_n-(x^2{}_n+ax_n-b)/(2x_n+a)$

そのものである．

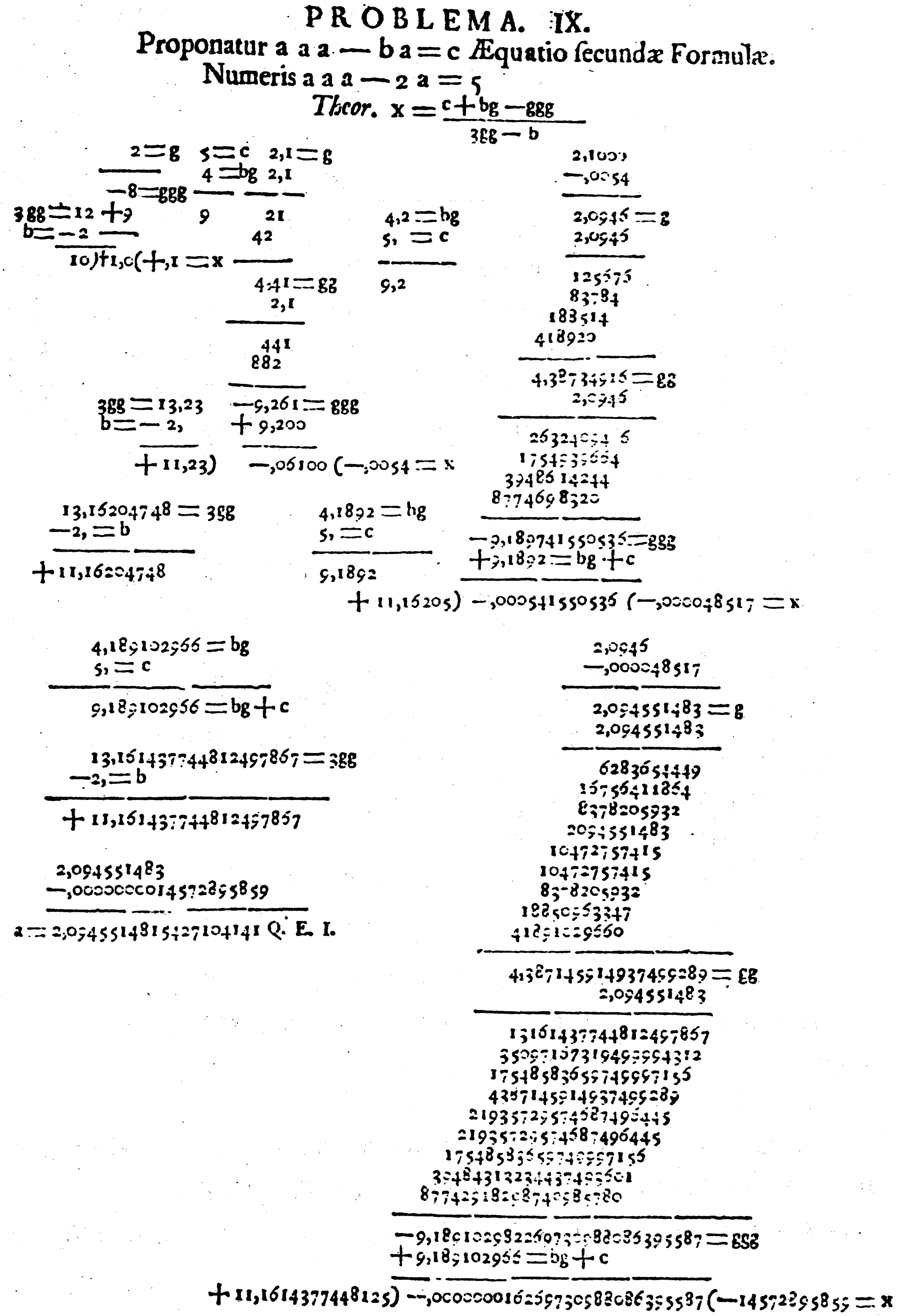
単項式の微分公式としては次のようなものが５次から１０次まで挙げてある．

gggggg	6ggggg
bggggg	5bgggg
cgggg	4cggg
dggg	3dgg
fgg	2fg
hg	h

以上のことよりRaphson が提案した反復解法は現在Newton-Raphson法，あるいは単にNewton法と言われる解法の原型をなしていることが分かる．次の図１

に例をあげるがRaphsonが常に原方程式に近似値を代入するのに対してNewtonは反復の度毎にできる新しい方程式に近似値を代入するした点が両解法の異なる点である.

図1　Raphson法の具体例（6）



PROBLEMA. IX.

Proponatur aaa — ba = c Æquatio secundæ Formulæ.

Numeris aaa — 2a = 5

Theor. $x = \frac{c + bg - ggg}{3gg - b}$

2 = g　5 = c　2,1 = g

−8 = ggg　4 = bg

3gg = 12 + 9

b = −2

10)+1,0(+,1 = x

4,41 = gg　4,2 = bg　5, = c　9,2

3gg = 13,23　b = −2,

+11,23)　−9,261 = ggg　+9,200　−,06100 (−,0054 = x

2,1000　−,0054　2,0946 = g

4,38734916 = gg

−9,189741550536 = ggg　+9,1892 = bg + c

13,16204748 = 3gg　−2, = b　+11,16204748

4,1892 = bg　5, = c　9,1892

+11,16205)　−,000541550536 (−,000048517 = x

2,0946　−,000048517　2,094551483 = g

4,189102966 = bg　5, = c　9,189102966 = bg + c

13,16143774481249 7867 = 3gg　−2, = b

+11,16143774481249 7867

4,38714591493749 9289 = gg

−9,18910298226973 5882086 3395587 = ggg　+9,189102966 = bg + c

2,094551483

−,0000000014572 2958 59

a = 2,09455148154327104141 Q. E. I.

+11,1614377448125)　−,0000000162597305882086 3595587 (−1457228958 59 = x

4．Vietaの解法

１７世紀のラテン語で書かれた（7）は大きく分けて5題と20題，細かく分けると全体で３４題の代数方程式の例題を含んでいる．その例題の一部はよく引用されるが，例えば(4)，解法や方程式の記法の紹介にとどまり数値例自体に対する論究はなされていないようである．ここでも先ず記法と解法について紹介する．それらは”代数学の父”と言われるにふさわしく現代に近い記法を用いて書かれている．

例えば，

1Q+7N,　adaequari 60,750　は　$x^2+7x = 60{,}750$,

1QQ+10C,　aequari　470,016　は　$x^4+10x^3=470{,}016$

を意味する．Vietaのあげた数値例を未知数をxとして書きなおしたものを表１にあげる．カッコ内の最初の数値はVietaが求めた解を示している．具体例を図２に示す．例１から例５まではそれ以後の代数方程式を解くための基本演習と言える．すなわち $(a+b)^2$，$(a+b+c)^2$ や $(a+b)^3$ の展開公式を用いて解を求めようとするわけである．例えば例２は次のようにして計算されている．

例題１ $x^3 = 157{,}464$ の解 54 を求める方法．

N	5	4	
Q	25	16	
C	125	64	予備計算

	157 464		
−	125 000		
	32 464	上の２数の計算	
	32 464		次の補正値　4　を
	7 500	2500×3	決めるための計算
+	150	50×3	
	7 650	和（2500×3+50×3）	32464/7650 ≒ 4.2
	30 000	7500×4	
+	2 400	150×16	
+	64	4^3	
	32 464	和（$7500\times4 + 150\times16 + 4^3$）	x=54

即ち

$$x^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

において初期値を　$a=50$　として　$(50+b)^3$　を先ず計算して

$$125000 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 157464$$

をえる．次に

$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 32464$ より $7500b + 150b^2 + b^3 = 32464$をえる．この場合は　32464/7650≒ 4.2　より解の第一位の数を4と推定する．

この例題のようにbが小さい場合は $7500b + 150b^2 \gg b^3$ となり第一位の数

の決定は容易であるが 後で述べるように決定が難しい場合もある．次に例６の
$x^2 + 954x = 18487$の解法について調べる．

例題２　$x^2 + 954x = 18487$　の解　19を求める方法．

１段階
```
9  54  00
1  84  87
```

２段階
```
   95  40
1  84  87
   95  40        954×10
    1  00         10×10
   96  40    和 (954×10+10×10)
   88  47       18487-9640
```

N	1	9	
Q	1	81	予備計算

３段階
```
    9  54       bの係数
   88  47     １の位の数9を決めるために上の数954と比較．
       20       bの係数
    9  74       bの係数の和(divisorum) 8847÷974≒9
   85  86       954×9
    1  80        20×9
       81         9×9
   88  47      和(954×9+2×9+9×9)
```

１段階でxの係数954と定数18487を比較してxは100以下であることを見つける．

２段階でxの10の位が1となることを見つけ，18487から9540(=954×10)と100 (=10^2)を引いて8847をえる．

３段階で$x=10+b$と置き原式に代入したときのbの係数974と残りの数8847より 8847/974≒9であるから1の位として9をえる．

Vietaは最初の近似値，例えば10をえたその次の桁の近似値をえるのにいわゆる次のような "divisorum" を導入している．すなわち

$f(x) = x^2 + 954x - 18487$ とおいて $f(10+b)-f(10)-b^2=974b$ をえる．この974を一般に"divisorum" と呼ぶわけである．Newton-Raphson法

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$$

に対比させてみると

$$f'(10)\fallingdotseq[f(10+b)-f(10)]/b\fallingdotseq 974$$

であるから $x_0=10$としたとき

$$10-f(10)/f'(10)\fallingdotseq 10+8847/974\fallingdotseq 19$$

となり次の近似値x_1として19をえるわけである．

この例のように$974b$に比較してb^2が無視できる場合は次の位は本例題の３段階のようにして探せるが，無視できない場合には困難な場合もある．

次の図２にVietaの解法の具体例をあげる（7）．

図２　Vietaの具体例(7)

Paradigma dum planum adfectionis majus est quadrato.

I Eductio lateris primi inanis ante devolutionem.

Coëfficiens longitudo	9	5 4 ·	 · ·	*ſublateralis.* *Tot puncta lateralia quot quadratica.*
Quadratum adficiens resolvendum	1 · Q	8 4 N · Q	8 7 N · Q	*Puncta quadratica.*

Quoniam 9 major eſt unitate, fit devolutio.

I I Eductio lateris primi poſt devolutionem.

Coëfficiens longitudo		9 5	4 · ·	*ſublateralis*
	1	8 4 · Q i	8 7 N · Q ij	
Plana auferenda		9 5 1	4 ·	*A latere primo in coëfficientem longitudinem.* *Quadratum lateris primis.*
Summa planorum ablatitiorum		9 6	4	
Reliquum resolvendi adficientis quadrati		8 8	4 7	

	o o	*Tot numeri les circuli quot puncta quadratica laterave ſingularia.*
Ñ	1 9	
Q	1. 81.	

I I Eductio lateris ſingularis ſecundi.

Diviſorum pars ſuperior { *Coëfficiens longitudo*	9	5 4 ·	
Reliquum reſolvendi adficientis quadrati	8 8	4 7 ·	
Diviſorum pars inferior { *Duplum lateris primi*		2	
Summa diviſorum.	9	7 4	
Plana ablatitia	8 5 1	8 6 8 8 1	*A latere ſecundo in coëfficientem.* *A latere ſecundo in duplum primi.* *Quadratum lateris ſecundi.*
Summa planorum auferenda, æqualis reliquo reſolvendi adficientis quadrati.	8 8	4 7	

Itaque ſi 954 N + 1 Q, *æquetur* 18, 487. *fit* 1 N 19. *Ex retrograda, quæ omnino obſervatà cernitur, compoſitionis via.*

5．VietaとRaphsonの数値例

ここでVietaとRaphsonのあげた数値例と数値解の比較をしてみる．

表１　Vietaの数値例

1．$x^2=2,916$　(54,-54)　　2．$x^3=157,464$　(54,複素数解)

3．$x^4=331,776$　(24,-24,24i,-24i)　　4．$x^5=7,962,624$　(24,複素数解)

5．$x^6=191,102,976$　(24,-24,複素数解)

1．$x^2+7x=60,750$ (243,-250),　　$954x+x^2=18,487$ (19,-973)

2．$x^3+30x=14,356,196$ (243,複素数解)

$95,400x+x^3=1,819,459$ (19,複素数解)

3．$x^3+30x^2=86,220,288$ (432,複素数解)

$10,000x+x^3=57,732,824$ (24,実数解)

4．$x^4+1,000x=355,776$ (24,実数解,複素数解)

$100,000x+x^4=2,731,776$ (24,実数解,複素数解)

5．$x^4+10x^3=470,016$ (24,実数解,複素数解)

6．$x^4+200x^2=446,976$ (24,-24,純虚数解)

$x^4+200x^2+100x=449,376$ (24,実数解,複素数解)

7．$x^5+500x=254,832$ (12, 複素数解)

8．$x^5+5x^3=257,472$ (12,複素数解)

9．$x^6+6000x=191,246,976$ (24,実数解,複素数解)

10．$x^2-7x=60,750$ (250,-243)　　$x^2-240x=484$ (242,-2)

11．$x^3-10x=13,584$ (24,複素数解)　$x^3-116,620x=352,947$ (343,実数解)

12．$x^3-7x^2=14,580$ (27,複素数解)　$x^3-10x^2=288$ (12,複素数解)

$x^3-7x^2=720$ (24,複素数解)

13．$x^4-68x^3+202,752x=5,308,416$ (32,実数解,複素数解)

14．$x^4+10x^3-200x=1,369,856$ (32,実数解,複素数解)

15．$x^5-5x^3+500x=7,905,504$ (24,複素数解)

16．$370x-x^2=9,261$ (27,343)

17．$13,104x-x^3=155,520$ (12,-12,108)

18．$57x^2-x^3=24300$ (30,45,-18)

19．$27,755x-x^4=217944$ (27,8,複素数解)

20．$65x^3-x^4=1,481,544$ (38,57,複素数解)

注　カッコ内の最初の解はVietaが求めたものである．

次にRaphsonのあげた数値例をあげる．

表２　Raphsonの数値例(1690年版)

1. $x^2=2$	2. $x^3=37945$
3. $x^4=2741583974$	4. $x^5=2327834559873$
5. $x^2+587x=987459$	6. $x^2-5x=31$
7. $8x-x^2=14$	8. $x^3+24x=587914$
9. $x^3-2x=5$	10. $x^3+6272x=288512$
11. $x^3-16x=444$	12. $x^3-50x=120$
13. $77284x-x^3=8083128$	14. $300x-x^3=1000$
15. $9x^2-x^3=100$	16. $9x^2-x^3=100$
17. $x^3+74x^2+8729x=560783$	18. $x^3-65x^2+914x=98746$
19. $x^4+6808x^2+672792x=43507216$	
20. $-x^4+62145x^3-1221125x^2+17575969772051x=1358691388751 23885$	
21. $-x^4+80x^3-1998x^2+14937x=5000$	22. $-x^4+32x^2+4x=225$
23. $x^4+40x^3+751x^2-9000x=90000$	24. $-x^5+7x^4-20x^3+155x^2=10000$
25. $x^5-5x^3+5x=1$	26. $x^6-5x^3+5x=1.5$
27. $-x^7+7x^5-14x^3+7x=1.5$	28. $x^2+5x=646$
29. $1000x-x^3=174$	30. $x+5x=646$
31. $x^3-430x=231$	32. $x^4-5x^2+7x=291$

次にVietaとRaphsonの数値例における解の種類についての比較を行なってみる.

表３　VietaとRaphsonの方程式における数値解の比較

	例題の数	正整数解	負整数解	非整数実数解	複素数解
Vieta	34題	36	10	9	50
Raphson	32題	1	0	73	38

この表よりVietaの数値例においては正整数解が多く(実際にVietaが求めた解はすべて正整数解), 一方Raphsonの数値例における正整数解は問題15における解が5の場合のみである. 彼はこれさえも4.9999..の形で数値解を表わしている. また表１よりVietaの求めた数値解の数字はほとんどが1,2,3,4といった数字の組合せからなっている. そのことはVietaが "divisorum"が有効に作用するように初期値を解の下側に取ったためである. 一方Raphsonは解が未知である方程式の解を求めようとしている.

6．原始Newton法とRaphson法の数値実験

方程式$F(x)=0$を

(a)解がよく分離している方程式　$x^3-2x-5=0$

(b)解がよく分離していない方程式　$(x-1.20)(x-1.21)(x-1.22)(x-1.23)=0$

(c)解の大小関係が激しい方程式　$(x^8-2^{-8})(x-2^8)(x^4-1)=0$

(d)多重解を持つ方程式　$(x-1.25)^3=0$

の4つの場合に分けて実数計算での数値実験の結果を次に示す．

（DOS-Fortran, Ver.3.2　単精度計算）．

数値実験において初期値は例えば　$x^3-2x-5=0$　の場合　$-2x-5=0$　を満たすxを初期値とした．１次の項がゼロの場合は順次２次，３次．．，の方程式の解の１つを初期値とした（複素解の場合は絶対値）．原始Newton法においては原方程式の定数項からみて補正値が計算桁より落ちたら収束とみなすことにした．Newton-Raphson法においては平野の方法（8）を用いた．減次も両側から行なう，いわゆる平野の方法を用いた．

原始Newton法

(a)　係数（高次項から）

```
1.0000000E+00      .0000000E+00    -2.0000000E+00    -5.0000000E+00
```

数値解　と　関数値

```
F( -2.5000000E+00)= -1.5625000E+01
F( -1.5671640E+00)= -5.7146330E+00
F( -5.0259230E-01)= -4.1217700E+00
F( -3.8207010E+00)= -5.3132270E+01
F( -2.5493900E+00)= -1.6470700E+01
F( -1.6081090E+00)= -5.9423750E+00
F( -5.7609710E-01)= -4.0390050E+00
F( -4.5976650E+00)= -9.2992510E+01
F( -3.0835130E+00)= -2.8151170E+01
F( -2.0221720E+00)= -9.2246780E+00
F( -1.1237400E+00)= -4.1715700E+00
F(  1.2088520E+00)= -5.6511800E+00
F(  3.5793240E+00)=  3.3698060E+01
F(  2.6544330E+00)=  8.3942990E+00
F(  2.2158120E+00)=  1.4476230E+00
F(  2.1020870E+00)=  8.4469840E-02
F(  2.0945800E+00)=  3.2293230E-04
F(  2.0945490E+00)= -3.0921410E-05
```

反復17回で収束　　数値解　2.0945490E+00

減次した結果の係数

```
1.0000000E+00    2.0945490E+00    2.3871340E+00
```

方程式の解は複素数で　-1.0472740E+00 ± 1.1359360E+00 i

(b) 係数（高次項から）

```
1.0000000E+00   -4.8600000E+00    8.8571000E+00   -7.1738460E+00
2.1788710E+00
```

数値解　と　関数値

```
F(  3.0372430E-01)=  6.8939540E-01
F(  5.3150890E-01)=  2.1812180E-01
F(  7.0233600E-01)=  6.9010620E-02
F(  8.3044080E-01)=  2.1832930E-02
F(  9.2649870E-01)=  6.9067050E-03
F(  9.9851390E-01)=  2.1841590E-03
F(  1.0524860E+00)=  6.9030070E-04
F(  1.0929090E+00)=  2.1788670E-04
F(  1.1231410E+00)=  6.8460760E-05
F(  1.1456790E+00)=  2.1254840E-05
F(  1.1623460E+00)=  6.6064600E-06
F(  1.1744070E+00)=  1.7369820E-06
F(  1.1826140E+00)=  9.5219600E-08
F(  1.1872980E+00)= -2.3417830E-07
```

反復13回で収束　　数値解　1.1872980E+00

減次した結果の係数

```
1.0000000E+00   -3.6727020E+00    4.4965070E+00   -1.8351510E+00
```

数値解　と　関数値

```
F(  4.0812810E-01)= -5.4377530E-01
F(  6.8024060E-01)= -1.6113770E-01
F(  8.6169240E-01)= -4.7758050E-02
F(  9.8273120E-01)= -1.4160840E-02
F(  1.0635440E+00)= -4.2036270E-03
F(  1.1176280E+00)= -1.2515940E-03
F(  1.1540700E+00)= -3.7601190E-04
F(  1.1791080E+00)= -1.1609660E-04
F(  1.1973600E+00)= -3.9042460E-05
F(  1.2134360E+00)= -1.6588280E-05
F(  1.2407600E+00)= -3.8400110E-06
F(  1.2442650E+00)=  8.2322530E-07
F(  1.2438190E+00)= -4.6551610E-08
```

反復12回で収束　　数値解　1.2438190E+00

減次した結果の係数

```
1.0000000E+00   -2.4288830E+00    1.4754160E+00
```

方程式の解は複素数で　　1.2144410E+00±2.3415280E-02i

(c) 係数（高次項から）

```
 1.0000000E+00   -2.5600000E+02    .0000000E+00    .0000000E+00
-1.0000000E+00    2.5600000E+02    .0000000E+00    .0000000E+00
-3.9062500E-03    1.0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00
 3.9062500E-03   -1.0000000E+00
```

数値解　と　関数値

```
F(  2.5600000E+02)=   .0000000E+00
```

反復0回で収束　　数値解　2.5600000E+02

減次した結果の係数

```
 1.0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00
-1.0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00
-3.9062500E-03    .0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00
 3.9062500E-03
```

数値解　と　関数値

F(-1.0000000E+00)= .0000000E+00

反復0回で収束　数値解　-1.0000000E+00

減次した結果の係数

1.0000000E+00	-1.0000000E+00	1.0000000E+00	-1.0000000E+00
.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00
-3.9062500E-03	3.9062500E-03	-3.9062500E-03	3.9062500E-03

数値解　と　関数値

F(1.0000000E+00)= .0000000E+00

反復0回で収束　数値解　1.0000000E+00

減次した結果の係数

1.0000000E+00	.0000000E+00	1.0000000E+00	.0000000E+00
.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00
-3.9062500E-03	.0000000E+00	-3.9062500E-03	

数値解　と　関数値

F(-1.0000000E+00)= 1.9921880E+00
F(-8.8927480E-01)= 6.9339060E-01
F(-7.9006850E-01)= 2.4023650E-01
F(-7.0208660E-01)= 8.2306390E-02
F(-6.2599720E-01)= 2.7386040E-02
F(-5.6432930E-01)= 8.4119310E-03
F(-5.2215150E-01)= 2.0607400E-03
F(-5.0331160E-01)= 2.6550280E-04
F(-5.0007250E-01)= 5.6701670E-06
F(-4.9998830E-01)= -9.0965020E-07
F(-4.9998830E-01)= -9.1570360E-07

反復10回で収束　数値解　-4.9998830E-01

減次した結果の係数

1.0000000E+00	-4.9998830E-01	1.2499880E+00	-6.2497950E-01
3.1248240E-01	-1.5623750E-01	7.8116940E-02	-3.9057550E-02
1.5622070E-02	-7.8108520E-03		

数値解　と　関数値

F(4.9998830E-01)= 4.9997770E-10

F(4.9998830E-01)= 4.9997770E-10

反復1回で収束　数値解　4.9998830E-01

減次した結果の係数

1.0000000E+00	.0000000E+00	1.2499880E+00	2.2488570E-08
3.1248240E-01	5.7938770E-09	7.8116940E-02	1.4914030E-09
1.5622070E-02			

この方程式の解はすべて複素数

(d)係数（高次項から）

1.0000000E+00	-3.7500000E+00	4.6875000E+00	-1.9531250E+00

数値解　　と　　関数値

```
F(   4.1666670E-01)= -5.7870370E-01
F(   6.9444440E-01)= -1.7146770E-01
F(   8.7962950E-01)= -5.0805300E-02
F(   1.0030860E+00)= -1.5053560E-02
F(   1.0853890E+00)= -4.4605780E-03
F(   1.1402560E+00)= -1.3215800E-03
F(   1.1768300E+00)= -3.9168330E-04
F(   1.2012020E+00)= -1.1621570E-04
F(   1.2174260E+00)= -3.4458740E-05
F(   1.2281870E+00)= -1.0150690E-05
F(   1.2352410E+00)= -3.0044260E-06
F(   1.2396820E+00)= -1.1146600E-06
F(   1.2421370E+00)= -6.9057690E-07
F(   1.2430610E+00)= -3.2779880E-07
```

反復13回で収束　　数値解　　　1.2430610E+00

減次した結果の係数

1.0000000E+00　-2.5069390E+00　1.5712220E+00

方程式の解は複素数で　1.2534700E+00 ± 6.0101330E-03i

Newton-Raphson法

(a)係数（高次項から）

1.0000000E+00　.0000000E+00　-2.0000000E+00　-5.0000000E+00

数値解　　と　　関数値

```
F(  -2.5000000E+00)= -1.5625000E+01
F(  -1.5671640E+00)= -5.7146330E+00
F(  -5.0259240E-01)= -4.1217690E+00
F(  -3.8207060E+00)= -5.3132470E+01
F(  -2.5493930E+00)= -1.6470750E+01
F(  -1.6081110E+00)= -5.9423870E+00
F(  -5.7609960E-01)= -4.0390030E+00
F(  -4.5976970E+00)= -9.2994510E+01
F(  -3.0835350E+00)= -2.8151750E+01
F(  -2.0221880E+00)= -9.2248440E+00
F(  -1.1237570E+00)= -4.1716010E+00
F(   1.2087100E+00)= -5.6515190E+00
F(   3.5803680E+00)=  3.3736130E+01
F(   2.6550030E+00)=  8.4052200E+00
F(   2.2160220E+00)=  1.4502970E+00
F(   2.1021150E+00)=  8.4778730E-02
F(   2.0945840E+00)=  3.5729840E-04
F(   2.0945520E+00)=  8.7723500E-07
```

反復17回で収束　　数値解　　　2.0945520E+00

減次した結果の係数

1.0000000E+00　2.0945520E+00　2.3871460E+00

方程式の解は複素数で　-1.0472760E+00 ± 1.1359400E+00 i

(b)係数（高次項から）

1.0000000E+00　-4.8600000E+00　8.8571000E+00　-7.1738460E+00
2.1788710E+00

数値解　と　関数値

```
F(  3.0372430E-01)=  6.8939540E-01
F(  5.3150890E-01)=  2.1812180E-01
F(  7.0233600E-01)=  6.9010620E-02
F(  8.3044000E-01)=  2.1832970E-02
F(  9.2649620E-01)=  6.9070500E-03
F(  9.9851210E-01)=  2.1845940E-03
F(  1.0524840E+00)=  6.9046720E-04
F(  1.0928870E+00)=  2.1821230E-04
F(  1.1230970E+00)=  6.8973050E-05
F(  1.1456380E+00)=  2.1401160E-05
F(  1.1620860E+00)=  6.7097030E-06
F(  1.1739130E+00)=  1.5968330E-06
F(  1.1800870E+00)=  2.6612530E-07
```

反復12回で収束　数値解　1.1800870E+00

減次した結果の係数

1.0000000E+00　-3.6799130E+00　4.5144820E+00　-1.8463650E+00

数値解　と　関数値

```
F(  4.0898710E-01)= -5.4712930E-01
F(  6.8170370E-01)= -1.6215350E-01
F(  8.6360820E-01)= -4.8075520E-02
F(  9.8503180E-01)= -1.4266670E-02
F(  1.0662390E+00)= -4.2445080E-03
F(  1.1208350E+00)= -1.2716770E-03
F(  1.1580790E+00)= -3.8832060E-04
F(  1.1845630E+00)= -1.2562990E-04
F(  1.2059560E+00)= -4.8055300E-05
F(  1.2320040E+00)= -2.4595500E-05
F(  1.2699730E+00)=  7.7988010E-05
F(  1.2573850E+00)=  1.8499110E-05
F(  1.2519390E+00)=  2.8452900E-06
F(  1.2507930E+00)=  1.3254620E-07
```

反復12回で収束　数値解　1.2507930E+000

減次した結果の係数

1.0000000E+00　-2.4291200E+00　1.4761550E+00

方程式の解は複素数で　1.2145600E+00 ± 3.1612170E-02i

(c)係数（高次項から）

```
 1.0000000E+00   -2.5600000E+02    .0000000E+00    .0000000E+00
-1.0000000E+00    2.5600000E+02    .0000000E+00    .0000000E+00
-3.9062500E-03    1.0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00
 3.9062500E-03   -1.0000000E+00
```

数値解　と　関数値

```
F(  2.5600000E+02)=   .0000000E+00
```

反復0回で収束　数値解　2.5600000E+02

減次した結果の係数

```
 1.0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00
-1.0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00
-3.9062500E-03    .0000000E+00    .0000000E+00    .0000000E+00
 3.9062500E-03
```

数値解　と　関数値

F(-1.0000000E+00)=　.0000000E+00

反復0回で収束　数値解　-1.0000000E+00

減次した結果の係数

1.0000000E+00	-1.0000000E+00	1.0000000E+00	-1.0000000E+00
.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00
-3.9062500E-03	3.9062500E-03	-3.9062500E-03	3.9062500E-03

数値解　と　関数値

F(1.0000000E+00)=　.0000000E+00

反復0回で収束　数値解　1.0000000E+00

減次した結果の係数

1.0000000E+00	.0000000E+00	1.0000000E+00	.0000000E+00
.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00	.0000000E+00
-3.9062500E-03	.0000000E+00	-3.9062500E-03	

数値解　と　関数値

F(-1.0000000E+00)=　1.9921880E+00
F(-8.8927480E-01)=　6.9339060E-01
F(-7.9006860E-01)=　2.4023670E-01
F(-7.0208670E-01)=　8.2306510E-02
F(-6.2599780E-01)=　2.7386280E-02
F(-5.6433120E-01)=　8.4123140E-03
F(-5.2215690E-01)=　2.0613280E-03
F(-5.0332140E-01)=　2.6630760E-04
F(-5.0008420E-01)=　6.5793940E-06
F(-5.0000010E-01)=　4.1909520E-09
F(-5.0000000E-01)=　.0000000E+00

反復10回で収束　数値解　-5.0000000E-01

減次した結果の係数

1.0000000E+00	-5.0000000E-01	1.2500000E+00	-6.2500000E-01
3.1250000E-01	-1.5625000E-01	7.8125000E-02	-3.9062500E-02
1.5625000E-02	-7.8125000E-03		

数値解　と　関数値

```
F(  5.0000000E-01)=   .0000000E+00
```

反復0回で収束　数値解　5.0000000E-01

減次した結果の係数

1.0000000E+00	.0000000E+00	1.2500000E+00	.0000000E+00
3.1250000E-01	.0000000E+00	7.8125000E-02	.0000000E+00
1.5625000E-02			

この方程式の解はすべて複素数

(d)係数（高次項から）

1.0000000E+00	-3.7500000E+00	4.6875000E+00	-1.9531250E+00

数値解　と　関数値

```
F(  4.1666670E-01)= -5.7870370E-01
F(  6.9444440E-01)= -1.7146770E-01
F(  8.7962960E-01)= -5.0805170E-02
F(  1.0030860E+00)= -1.5053330E-02
F(  1.0853900E+00)= -4.4603240E-03
F(  1.1402590E+00)= -1.3216450E-03
F(  1.1768400E+00)= -3.9164720E-04
F(  1.2012310E+00)= -1.1593450E-04
F(  1.2174790E+00)= -3.4456640E-05
F(  1.2283390E+00)= -1.0228030E-05
F(  1.2356050E+00)= -2.9293300E-06
F(  1.2403180E+00)= -7.0895040E-07
F(  1.2428360E+00)= -3.7608340E-07
```

反復12回で収束　数値解　1.2428360E+00

減次した結果の係数

1.0000000E+00	-2.5071640E+00	1.5715070E+00

方程式の解は複素数で　1.2535820E+00 ± 6.2038710E-03i

おわりに

F.Maseres (5) は原始Newton法とRaphson法を比較して解法は同じとみなせるがRaphson法の方が単純であると述べている．確かに原始Newton法は近似値が解に接近するに従いその桁数が増えるため係数の桁数が増大し計算が煩雑になる．F.Cajori (2) はNewtonは $f(x)/f'(x)$ の形の補正項は使っておらず，他方Raphsonはcanonと言う名において $f(x)/f'(x)$ の形の補正項を利用しているので，Newton法と言うよりもNewton-Raphson法と言う呼び方の方が歴史的事実を表していると述べている．更に本来はNewton-Raphson法と呼ばれるべき解法が単にNewton法と呼ばれるようになったのは M.Fourier (3) による点が大きいのではないかとも述べている．M.Fourierは $x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$ の形の反復式を使い $x^3-2x-5=0$ の解の存在範囲を上側と下側から抑える形で求めようとしている．NewtonやRaphsonが数値解を求めようとしたのに対してM.Fourierは解の存在範囲や収束の次数について注目している．

前にも述べたようにVietaの解法は常に下側から解に接近しようとしたため不都合の起こる場合がある．例えば　$x^2=19^2$ の解を求めようとしたとき初期値として10を選ぶため

$$(10+b)^2=100+20b+b^2=361 \text{ より } 20b+b^2=261$$

となり，261/20≒13よりつぎの位の数は13となり，いわゆるdivisorumが有効に作用しなくなる．もしVietaが上側から解に接近することも考慮していたら，

$$(20-b)^2=400-40b+b^2=361 \quad \text{より} \quad 39/40≒1$$

であるからdivisorumが有効に作用し数値例も豊富なったものと思われる．

Newtonは上側からのあるいは下側からのといった初期値に拘らなかった．しかし反復の度毎に次々と新しい方程式を作ったために計算の煩雑さからのがれることが出来なかった．

原始Newton法とNewton-Raphson法の数値結果における差異は今までのところほとんど見られない．

本稿を書くにあたり貴重な文献をコピーさせてくれた英国の St. Andrew大学（文献　(7)），British　Library（文献(6)1690年版），Edinburgh大学（文献(2),(5),(6)1697年版），Science　Museum　Library（文献(3)）に深く感謝します．

文献

(1) N.Bicanic and K.H.Johnson "WHO WAS '-Raphson'?, Intern.J.Numer. Methods Eng., 14,1979, pp.148-152.

(2) F.Cajori "HISTORICAL NOTE ON THE NEWTON-RAPHSON METHOD OF APPROXIMATION", A.M.Monthly 18,pp.29-32,1911.

(3) M.Fourier "QUESTION D'ANALYSE ALGEBRIQUE", Bulletin des Sciences par la Societe Philo.,pp.66-67.,1818

(4) H.Goldstine "A HISTORY OF NUMERICAL ANALYSIS FROM THE 16th THROUGH THE 19th CENTURY", Springer,1977, pp.64-68.

(5) F. Maseres "TRACTS ON THE Resolution of Affected Algebraik Equations" London, 1800.

(6) J.Raphson "Analysis Aequationum UNIVERSALIS SEU Ad AEQATIONES ..." London, 1690年(初版),1697年(第２版)．1702年にも出版されているが第２版の重版である．

(7) Vieta "Opera Mathematica",Leyden,1646,pp.163-228(DE NUMEROSA POTESTATuM PVRARVM RESOLVTIONE",

(8)平野菅保　浮動小数点演算における代数方程式の数値解法，学位論文，1980